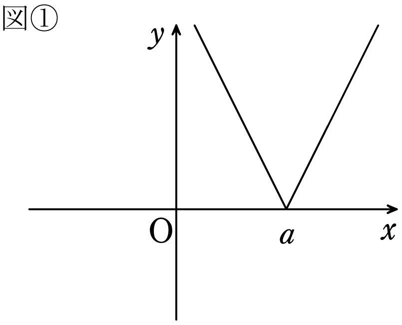
数学（甲）

1

問1

$$f(x)=2|x-a|=\begin{cases}2x-2a & (x\geqq a)\\ -2x+2a & (x<a)\end{cases}より$$

図①



$y=2|x-a|$のグラフは図①。

よって$y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$にグラフが

$0<a$において共有点を1つのみ持つのは、図②

のように、$y=-2x+2a$が$y=f(x)$と接するとき

である。

このとき

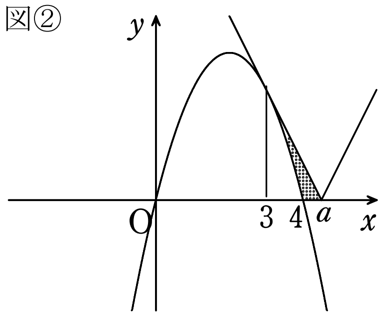
$$-x^2+4x=-2x+2a$$

$\Leftrightarrow$ $x^2-6x+2a=0$ …（＊）

は重解をもつので

$D/4=9-2a=0$から　$a=\dfrac{9}{2}$　…答

図②



問2

接点のx座標は（＊）に$a=\dfrac{9}{2}$を代入して

$$x^2-6x+9=0$$

$\Leftrightarrow$ $(x-3)^2=0$　から　$x=3$

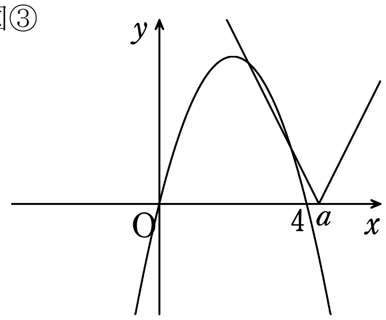
$y=f(x)$とx軸との交点のx座標は

$$-x^2+4x=0 \quad から \quad x=0,\ 4$$

よって求める面積は図②の網掛け部分より

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{2}-3\right)\cdot 3-\int_3^4(-x^2+4x)dx=\frac{7}{12}$$ …答

図③

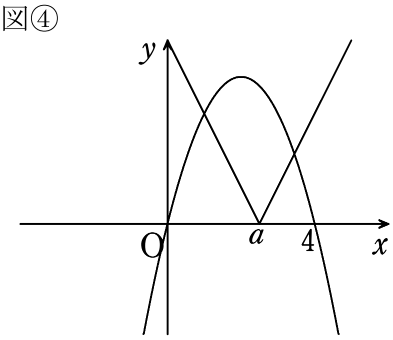


問3

交点が2つとなるのは右図の③と④の場合で、

求めるaの範囲は$0<a<\dfrac{9}{2}$

図④



図③より、$4\leqq a<\dfrac{9}{2}$のとき交点は

$y=f(x)$と$y=-2x+2a$との交点より

$$-x^2+4x=-2x+2a$$

$\Leftrightarrow$ $x^2-6x+2a=0$から$x=3\pm\sqrt{9-2a}$

図④より、$0<a<4$のとき交点は$y=f(x)$と$y=2x-2a$との交点でx座標が大きい方と、

$y=f(x)$と$y=-2x+2a$との交点でx座標の小さい方なので

$$-x^2+4x=2x-2a$$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x-2a=0\ \Leftrightarrow\ x=1\pm\sqrt{1+2a}$

$-x^2+4x=-2x+2a$

$\Leftrightarrow\ x^2-6x+2a=0\ \Leftrightarrow\ x=3\pm\sqrt{9-2a}$

これより、$x=1+\sqrt{1+2a}$、$x=3-\sqrt{9-2a}$

よって、aの範囲は

$0<a<\dfrac{9}{2}$ …答

2つの交点のx座標は

$0<a<4$のとき、$x=1+\sqrt{1+2a}$ または $x=3-\sqrt{9-2a}$

$4\leqq a<\dfrac{9}{2}$のとき、$x=3\pm\sqrt{9-2a}$ …答

2

問1

$a_1=1^2+1+1=3,\ a_2=2^2+2+1=7,\ a_3=3^2+3+1=13$より

$x_2+y_2i=(3+i)(7+i)=20+10i$ より $x_2=20,\ y_2=10$ …答

$x_3+y_3i=(3+i)(7+i)(13+i)=(20+10i)(13+i)=250+150i$

より $x_3=250,\ y_3=150$ …答

問2

$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ …（＊）とする。

数学的帰納法によりこれを証明する。

ｉ）$n=1$のとき

$x_1+y_1i=a_1+i=3+i$ から $x_1=3,\ y_1=1$

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$$

よって、$n=1$で（＊）成立する。

ⅱ）$n=k$で成立すると仮定する。すなわち$\dfrac{y_k}{x_k}=\dfrac{k}{k+2}$ …①が成り立つものとする。

このとき

$$\begin{aligned}x_{k+1}+y_{k+1}i&=(x_k+y_ki)(a_{k+1}+i)\\&=(x_k+y_ki)\{(k+1)^2+(k+1)+1+y_ki\}\\&=\{x_k(k^2+3k+3)-y_k\}+\{y_k(k^2+3k+3)+x_k\}i\end{aligned}$$より

$x_{k+1}=x_k(k^2+3k+3)-y_k,\ y_{k+1}=y_k(k^2+3k+3)+x_k$

よって

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}=\frac{y_k(k^2+3k+3)+x_k}{x_k(k^2+3k+3)-y_k}$$

ここで①より$y_k=\dfrac{kx_k}{k+2}$なので、

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}=\frac{\dfrac{kx_k}{k+2}(k^2+3k+3)+x_k}{x_k(k^2+3k+3)-\dfrac{kx_k}{k+2}}$$

$$=\frac{(k^3+3k^2+4k+2)x_k}{(k^3+5k^2+8k+6)x_k}$$

$$=\frac{(k+1)(k^2+2k+2)x_k}{(k+3)(k^2+2k+2)x_k}$$

$$=\frac{k+1}{k+3}=\frac{k+1}{(k+1)+2}$$

よって、$n=k+1$でも（＊）は成立する。

ｉ）、ⅱ）より数学的帰納法により任意の自然数nについて$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$が成り立つ。

3

三角関数の合成より

$$f(x)=e^{\sin x+\cos x}=e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

となる。よって、

$$f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$f''(x)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\left\{2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\left\{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\right\}e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-2\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\right\}e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

ここで、$f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0$ となるのは

$$e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0 \text{ なので、}\quad \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$$

となればよい。$x+\dfrac{\pi}{4}$の範囲が$-\dfrac{3}{4}\pi\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$なので、

$$-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\quad\text{より}\quad -\frac{3}{4}\pi<x<\frac{\pi}{4}$$

同様にして、$f'(x)<0$となるのは　$-\pi<x<-\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{4}<x<\pi$

$f''(x)>0$となるのは　$e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0$ ，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}>0$　なので、

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となればよいので、$-\dfrac{3}{4}\pi \leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$　より

$$-\pi\leqq x<0,\ \frac{\pi}{2}<x\leqq\pi$$

同様にして、$f''(x)<0$となるのは　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{1}{e},\ f\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=e^{-\sqrt{2}},\ f(0)=e,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\sqrt{2}},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$$

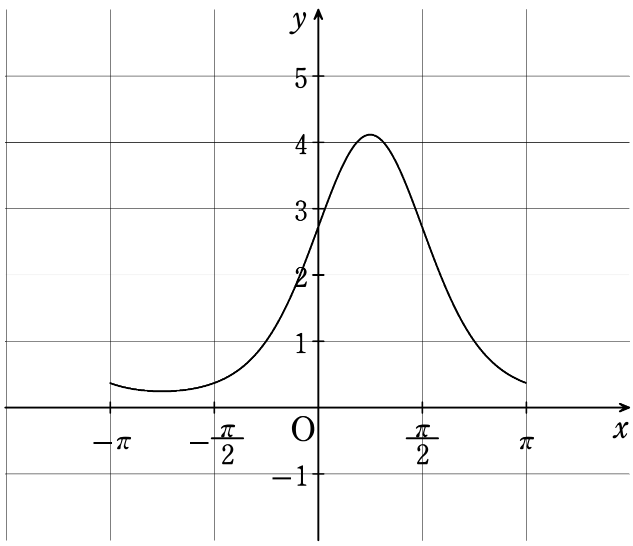
よって求める関数の増減及び凹凸は下記の表となる。

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
$f''(x)$	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+1$	/
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↘	$e^{-\sqrt{2}}$	↗	e	↗	$e^{\sqrt{2}}$	↘	e	↘	$\frac{1}{e}$

よって　　$x=-\dfrac{3}{4}\pi$で極小値　$e^{-\sqrt{2}}$　　　$x=\dfrac{\pi}{4}$で極大値　$e^{\sqrt{2}}$

また変曲点は$(0,\ e)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\ e\right)$

これよりグラフは次のようになる。



$\boxed{4}$

問1

1回の操作の後A，Bどちらにも赤玉と白玉が入っているのは

AからBへ赤、BからAへ赤を移す場合と、AからBへ白、BからAへ白を移す場合の2通り

があり、確率はそれぞれ$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$より　$p_1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$　…答

2回の操作の後A，Bどちらにも赤玉と白玉が入っているのは

（ｉ） 1回の操作の後A，Bどちらにも赤玉と白玉が入っていて、2回目にAからBへ赤、BからAへ赤を移すか、AからBへ白、BからAへ白を移す場合

（ii） 1回目の操作の後A，Bは赤だけか白だけかになっているときは、２回目で必ずA，Bに赤玉と白玉が入る

の2通りあり、

（ｉ）の場合は$p_1=\dfrac{1}{2}$より２回目の確率は　$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times2=\dfrac{1}{4}$

（ii）の場合は、1回目の操作の後A，Bが赤だけか白だけかになっている確率は$1-p_1=\dfrac{1}{2}$

　で、２回目の確率は　$\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$

よって（ｉ）、（ii）より　$p_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$　…答

問2

$n+1$回の操作の後A，Bどちらにも赤玉と白玉が入っているのは

（ｉ） n回の操作の後A，Bどちらにも赤玉と白玉が入っていて、$n+1$回目にAからBへ赤、BからAへ赤を移すか、AからBへ白、BからAへ白を移す場合

（ii） n回目の操作の後A，Bは赤だけか白だけかになっているときは、２回目で必ずA，Bに赤玉と白玉が入る

の2通りある。

（ｉ）の場合、$n+1$回目の確率は　$p_n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times2=\dfrac{1}{2}p_n$

（ii）の場合、n回目の操作の後A，Bが赤だけか白だけかになっている確率は$1-p_n$となり、$n+1$回目の確率は

$$(1-p_n)\times1=1-p_n$$

よって　$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+1-p_n=-\dfrac{1}{2}p_n+1$　…答

問3

$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n+1$　は　$p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)$　と変形できるので

$$p_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これより　$p_n=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$　…答