$\boxed{1}$ [20センター追試 センター追試]

関数 $y=-2^{2x}+2^{x+4}-48$ について考える。

(1)　$t=2^x$ とおく。y を t の式で表すと

$$y=\boxed{\text{ア}}\left(t-\boxed{\text{イ}}\right)^2+\boxed{\text{ウエ}}$$

となる。

$x=1$ のとき，$y=\boxed{\text{オカキ}}$ である。$x \geqq 1$ のとき，y は $x=\boxed{\text{ク}}$ で最大値 $\boxed{\text{ケコ}}$ をとる。

(2)　$k>1$ とする。x が $1 \leqq x \leqq k$ の範囲を動くとき，y の最小値が $\boxed{\text{オカキ}}$ であるような k の値の範囲は

$$1<k \leqq \log_2 \boxed{\text{サシ}}$$

である。この範囲に含まれる最大の整数の値は $\boxed{\text{ス}}$ である。

(3)　$y=0$ を満たす x は二つある。そのうちの小さい方は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，大きい方は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑨ のうちから一つ選べ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

⓪ $1<x<1.2$　① $1.2<x<1.3$　② $1.5<x<1.6$

③ $2.4<x<2.5$　④ $2.5<x<2.6$　⑤ $2.6<x<2.8$

⑥ $3.5<x<3.6$　⑦ $3.6<x<3.8$　⑧ $4.2<x<4.4$

⑨ $x>10$

$\boxed{2}$ [20センター追試 センター追試]

関数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos 3x$ について考える。

(1) 三角関数の加法定理および合成を用いると

$$f(x)=-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\sin 3x+\frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{イ}}\cos 3x$$

$$=\boxed{オ}\sin\left(3x+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi\right)$$

と表される。ただし，$0<\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi\leqq 2\pi$ とする。

したがって，$f(x)$ の最大値は $\boxed{ク}$ である。また，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものは $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi$ である。

(2) $f(x)$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で考えたとき，実数 t に対して $f(x)=t$ となる x の値の個

数 N を調べよう。$3x+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ のとり得る値の範囲に注意すると，次のことがわかる。

$|t|>\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{サ}}$ である。

$t=\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{シ}}$ である。

$t=f(0)$ のとき，$N=\boxed{\text{ス}}$ である。

$|t|<\boxed{\text{ク}}$ かつ $t\neq f(0)$ のとき，$N=\boxed{\text{セ}}$ である。

$t=-\boxed{\text{ク}}$ のとき，$N=\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{3}$ [20センター追試 センター追試]

a，b，c を実数とし，関数 $f(x)=x^3-1$，$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，曲線 $y=g(x)$ を C_2 とする。C_2 は点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$ を通り，C_2 の A における接線は C_1 の A における接線と一致するものとする。

(1)　曲線 C_1 の点 A における接線を ℓ とする。$f'(-1)=\boxed{\text{ア}}$ により，ℓ の方程式は

$y=\boxed{\text{イ}}x+\boxed{\text{ウ}}$ である。また，原点 O と直線 ℓ の距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2)　曲線 C_2 の点 A における接線は (1) の直線 ℓ と一致しているので，$g'(-1)=\boxed{\text{カ}}$ である。したがって，b，c を a を用いて表すと，$b=\boxed{\text{キ}}a$，$c=\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}$ となる。

(3)　$a=-2$ のとき，関数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{スセソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ をとり，$x=\boxed{\text{ツ}}$ で極小値 $\boxed{\text{テトナ}}$ をとる。

(4)　$a<0$ とする。$-2 \leqq x \leqq -1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=-2$ で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，曲線 C_1 と C_2 および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S=S_1+S_2$ とおくと，$S=$ $\boxed{\text{ニ}}$ と表される。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪　$\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

①　$\displaystyle\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$

②　$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$

③　$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

これを計算することにより，$S=$ $\boxed{\text{ヌネ}}\,a$ となる。

$\boxed{4}$ [20センター追試 センター追試]

初項 a_1 が 1 であり，次の条件 ①，② によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考えよう。

$$a_{2n}=a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_{2n+1}=a_n+a_{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots ②$$

(1) ① により $a_2=a_1$ となるので $a_2=1$ であり，② により $a_3=a_1+a_2$ となるので $a_3=2$ である。同様に

$$a_4=\boxed{\text{ア}},\ a_5=\boxed{\text{イ}},\ a_6=\boxed{\text{ウ}},\ a_7=\boxed{\text{エ}}$$

である。

また，a_{18} については，$a_{18}=a_9$ により $a_{18}=\boxed{\text{オ}}$ であり，a_{38} については，$a_{38}=a_{19}=a_9+a_{10}$ により $a_{38}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) k を自然数とする。① により $\{a_n\}$ の第 $3\cdot 2^k$ 項は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項以降を次のように群に分ける。ただし，第 k 群は 2^k 個の項からなるものとする。

$$a_3,\quad a_4 \;\Big|\; a_5,\quad a_6,\quad a_7,\quad a_8 \;\Big|\; a_9,\quad \cdots\cdots,\quad a_{16} \;\Big|\; a_{17},\quad \cdots\cdots$$

第1群　　　　　第2群　　　　　第3群

2以上の自然数 k に対して，$\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} 2^j = \boxed{\text{ク}}^{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$ なので，第 k 群の最初の項は，$\{a_n\}$ の第 $\left(\boxed{\text{ク}}^{\boxed{\text{ケ}}} + \boxed{\text{サ}}\right)$ 項であり，第 k 群の最後の項は，$\{a_n\}$ の第 $\boxed{\text{ク}}^{\boxed{\text{シ}}}$ 項である。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$k-2$　　① $k-1$　　② k　　③ $k+1$　　④ $k+2$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k，第 k 群に含まれるすべての奇数番目の項の和を T_k，第 k 群に含まれるすべての偶数番目の項の和を U_k とする。

たとえば

$$S_1 = a_3 + a_4,\qquad T_1 = a_3,\qquad U_1 = a_4$$

$$S_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8,\qquad T_2 = a_5 + a_7,\qquad U_2 = a_6 + a_8$$

であり

$$S_1 = \boxed{\text{ス}},\quad S_2 = \boxed{\text{セ}},\quad T_2 = \boxed{\text{ソ}},\quad U_2 = \boxed{\text{タ}}$$

である。

(4)　(3) で定めた数列 $\{S_k\}$，$\{T_k\}$，$\{U_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよう。

① により $U_{k+1}=\boxed{\text{チ}}$ となる。また，$\{a_n\}$ の第 2^k 項と第 2^{k+1} 項が等しいことを用いると，② により $T_{k+1}=\boxed{\text{ツ}}$ となる。したがって，$S_{k+1}=T_{k+1}+U_{k+1}$ を用いると，$S_{k+1}=\boxed{\text{テ}}$ となる。$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑨ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　S_k　　①　S_k+3k　　②　T_k

③　U_k　　④　$2S_k$　　⑤　$2T_k$

⑥　$2T_k+2k-1$　　⑦　$2T_k+k(k+1)$　　⑧　$3S_k$

⑨　$3S_k+(k-1)(k-2)$

以上のことから

$$S_k=\boxed{\text{ト}},\ T_k=\boxed{\text{ナ}},\ U_k=\boxed{\text{ニ}}$$

である。$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓑ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $2k^2-4k+3$

① 3^{k-1}

② $2^{k+1}-2k-1$

③ $2^{k+2}-2k^2-5$

④ $4k^2-8k+6$

⑤ $2\cdot 3^{k-1}$

⑥ $2^{k+2}-4k-2$

⑦ $2^{k+3}-4k^2-10$

⑧ $6k^2-12k+9$

⑨ 3^k

ⓐ $3\cdot 2^{k+1}-6k-3$

ⓑ $3\cdot 2^{k+2}-6k^2-15$

$\boxed{5}$ [20センター追試 センター追試]

1辺の長さが1のひし形ABCDにおいて，$\angle BAD > 90°$ とする。直線BC上に，点Cとは異なる点Eを，$\left|\overrightarrow{DE}\right| = 1$ を満たすようにとる。以下，$\overrightarrow{AB} = \vec{p}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{q}$ とし，$\vec{p} \cdot \vec{q} = x$ とおく。

(1) $\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\,x$ である。

(2) $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{BE}$ は平行なので，実数 s を用いて $\overrightarrow{AE} = \vec{p} + s\vec{q}$ と表すことができる。

$\left|\overrightarrow{DE}\right| = 1$ であることと，点Eは点Cと異なる点であることにより，

$s = \boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オ}}$ である。

(3) $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{BE}\right|$ を満たす x の値を求めよう。

(2)により，$\overrightarrow{AE} = \vec{p} + \left(\boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オ}}\right)\vec{q}$ である。$\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{BE}\right|$ と $\angle BAD > 90°$ により，$x = \dfrac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ が得られる。

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{p}+\frac{\boxed{\text{ケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q} \quad \cdots\cdots ①$$

である。

(4)　x を (3) で求めた値とし，点 F を直線 AC に関して点 E と対称な点とする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|$ を求めよう。

点 B と点 D が直線 AC に関して対称な点であることに注意すると，① により，

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{p}+\vec{q}$ と表せる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

である。

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|$ であり，(2) により $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\left(\boxed{\text{ウエ}}x+\boxed{\text{オ}}\right)\vec{q}$ となるので，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\dfrac{\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ を得る。ゆえに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|=\boxed{\text{ニ}}$ である。

(5)　x を (3) で求めた値とし，点 R を △ABD の外接円の中心とする。$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて表そう。

$\triangle$ABD は AB＝AD を満たす二等辺三角形であるから，点 R は直線 AC 上にある。点 F を (4) で定めた点とし，線分 AD の中点を M とする。(4) の結果を用いることにより，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FM}}$ は垂直であることが確かめられる。よって，点 R は直線 AC と直線 FM の交点であり，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表すことができる。t を求めることにより，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}+\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノハ}}}(\vec{p}+\vec{q})$ が得られる。